Aus dem Institut für Pflanzenzüchtung Quedlinburg der Deutschen Akademie der Landwirtschaftswissenschaften zu Berlin

Zum quantitativen Vergleich der Ertragsbildung verschiedener Sorten *

Von STEPHAN CLAUS und KURT UNGER

Quedlinburger Beiträge zur Züchtungsforschung Nr. 69

Mit 2 Abbildungen

1. Einleitung

Die Leistung gezüchteter Sorten und Stämme entscheidet letztlich über den Erfolg einer Züchtung. Aus diesem Grunde kommt dem Vergleich der für die Nutzung wichtigsten Leistungsmerkmale, vor allem dem Ertrag, eine besondere Bedeutung zu. Der Ertrag ist wie alle anderen die Leistung der Sorten und Stämme bestimmenden Merkmale sehr stark durch mannigfaltige Einwirkungen aus der Umwelt, in der die Pflanzen wachsen, zu beeinflussen. Deshalb gibt der Ertrag so ohne weiteres kein eindeutiges Bild von der Leistung einer Sorte oder eines Stammes. Um trotzdem zu einem sinnvollen Ertragsvergleich verschiedener Sorten und Stämme zu gelangen, werden diese dem Vorgehen R. A. FISHERS folgend in mehr oder weniger komplizierten Feldversuchen angebaut, die so geplant sind, daß sich eine sorgfältige statistische Analyse anschließen kann (FISHER 1950, KEMPTHORNE 1952). Üblicherweise wird eine Varianzanalyse durchgerechnet, wenn die einschlägigen Voraussetzungen als erfüllt gelten können. Mit der Varianzanalyse gelingt es, die Bodeneinflüsse und die Düngungsunterschiede wenigstens annähernd zu eliminieren, so daß sich, je nach dem gewählten Modell, die Sorten und Stämme hinsichtlich ihrer Erträge vergleichen lassen. Die veränderliche Wirkung der Umwelteinflüsse, darunter beispielsweise die der Witterung während der pflanzlichen Entwicklung und damit während der Ertragsbildung, werden im Versuch nicht weiter berücksichtigt; sie erscheinen bei einer solchen Auswertung mit in der Restvarianz zusammengefaßt.

Im Gegensatz zu diesem reinen Ertragsvergleich soll sich die vorliegende Arbeit auf die durch Umwelteinflüsse bedingte Ertragsbildung beziehen. Dabei wird ein Vergleich der Sorten und Stämme hinsichtlich ihrer Reaktion auf die wechselnden Umwelteinflüsse angestrebt.

2. Gegenüberstellung: Ertragsgrößen und Zustandsparameter für die Umwelt

Wenn die Ertragsbildung irgendeiner Kulturpflanzenart in ihrer komplizierten Abhängigkeit von den veränderlichen Umweltbedingungen untersucht werden soll, so ergibt sich eigentlich immer wieder das gleiche Bild. Nach Ablauf einer gewissen Zeitspanne, nämlich der Zeit zwischen der Aussaat und der Ernte, stehen für das Studium der Ertragsbildung einige Ertragsgrößen, meistens ausgedrückt in Gewichtseinheiten bezogen auf Flächeneinheiten, zur Verfügung. Während dieser Zeitspanne hat sich die Umgebung der Pflanzen fortlaufend von einem Anfangszustand aus über viele Zwischenzustände zu einem Endzustand hin verändert. Diese Zustände lassen sich mehr oder weniger genau feststellen oder registrieren, sofern zu ihrer Charakterisierung geeignete Parameter herangezogen werden.

Das Problem der Ertragsbildung stellt sich dann so dar. Es ist die anschauliche Vorstellung darüber, daß die sich dauernd ändernde Umwelt der Pflanzen die Ertragsbildung wesentlich mit beeinflussen müßte, genauer zu formulieren. Es handelt sich also darum, Beziehungen zwischen zwei Gesamtheiten von Meßgrößen herzustellen, nämlich zwischen den Ertragsgrößen auf der einen Seite und den die Umwelt charakterisierenden Zustandsparametern auf der anderen Seite. Ist dies gelungen, so gilt es, diese Beziehungen für verschiedene Sorten miteinander zu vergleichen; denn jede dieser Beziehungen beschreibt die Reaktion der betreffenden Sorte auf die Einwirkungen aus der Umwelt.

3. Der Zustandsraum; die Problematik des Zeitintervalles

Bevor das eben skizzierte Problem der Ertragsbildung bearbeitet werden kann, muß der Raum der für die Umgebung möglichen Zustände festgelegt werden. Wir bezeichnen diesen Raum, der von der Zeit und den Umweltparametern aufgespannt wird, als „Zustandsraum".

Unter den Parametern, welche die Zustände der Umgebung für die wachsenden Pflanzen oder des ganzen Pflanzenbestandes kennzeichnen, werden nicht nur die meteorologischen Elemente verstanden, sondern auch jene, welche die Eigenschaften des Bodens beschreiben, also die Bodentemperaturen, die Bodenfeuchte, der Nährstoffgehalt des Bodens usw. Ganz allgemein werden alle im Prinzip meßbaren Größen, welche die Einflüsse der Umgebung auf die Pflanzen bestimmen helfen, zu den Parametern der Umwelt gerechnet. Die oben genannten Zustände für die Umgebung der Pflanzen lassen sich somit durch einen Vektor darstellen, dessen Komponenten Funktionen der Zeit sind, die sich wenigstens im Prinzip durch geeignete Messungen bestimmen lassen und damit für eine Auswertung zur Verfügung stehen. In dem Zustandsraum liegen alle Zustände, die innerhalb der Versuchswiederholungen, also innerhalb der Jahre und Aussaatstufen vorkommen können.

Eine gewisse Schwierigkeit bereiten bei der Festlegung des Zustandsraumes die Zeitintervalle von der Aussaat bis zur Ernte der betreffenden Pflanzenart in den einzelnen Wiederholungen. Wir treffen hier folgende Entscheidung. Als festes Grundintervall für die Zeit im Zustandsraum wird das für die zu untersuchende Pflanzenart charakteristische phänologische Zeitintervall gewählt. Dieses gliedert sich in bestimmte Teilabschnitte, beispielsweise bei Erbsen

* Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. G. BECKER zum 60. Geburtstag gewidmet.

in: Aussaat bis Aufgang, Aufgang bis Beginn der Blüte, Beginn der Blüte über Vollblüte bis Ende der Blüte, Ende der Blüte bis Ernte. Für die Länge der Teilabschnitte des normierten phänologischen Zeitintervalles kann der Mittelwert der in den Experimenten beobachteten Zeitabschnitte verwendet werden. Der Übergang von der tatsächlichen zeitlichen Folge der Zustände in der Umgebung der Pflanzen zu der über dem phänologischen Zeitintervall liegenden wird hier durch eine Transformation bewirkt, welche die einzelnen Umweltparameter ungeändert läßt, zugehörige phänologische Teilabschnitte aber ähnlich aufeinander abbildet. Damit werden die individuellen Verläufe aufeinanderfolgender Zustände über der normierten phänologischen Zeitskala miteinander vergleichbar. Der Zustandsraum läßt sich dann als ein verallgemeinertes Rechteck in einem $(s + 1)$-dimensionalen euklidischen Raume deuten, wenn insgesamt s Umweltparameter in die Betrachtungen einbezogen werden. Andere Transformationen der Umweltparameter einschließlich der Zeit wären durchaus denkbar. Ein plausibles Prinzip für die Wahl einer geeigneten Transformation ließ sich aber bisher noch nicht formulieren.

4. Ansätze für die Ertragsbildung

Nachdem der Begriff des Zustandsraumes erklärt ist, lassen sich die im Abschnitt 2 gemachten allgemeinen Bemerkungen über die Ertragsbildung noch etwas ergänzen. Die Punkte des Zustandsraumes stellen die möglichen Konstellationen der Umweltparameter dar, die den Zustand der Umgebung am Standort der Pflanzen bestimmen. Es gibt dabei ohne Zweifel solche Konstellationen, die für die Ausbildung eines hohen Ertrages günstig sind, und es gibt solche, die dafür hinderlich sind. Das bedeutet, daß die einzelnen Punkte des Zustandsraumes für die Ertragsbildung in geeigneter Weise bewertet oder gewichtet werden müssen. Das Verhalten jeder Sorte gegenüber den wechselnden Umweltbedingungen wird somit, unter der Voraussetzung, daß die Wirkungen verschiedener Konstellationen der Umweltparameter auf die Pflanzen weitgehend als voneinander unabhängig betrachtet werden dürfen, durch eine ihr zugehörige Bewertungsfunktion charakterisiert. Die Ertragsbildung selbst erscheint im Sinne der hier ausgeführten allgemeinen Vorstellungen als eine Integration jener Bewertungsfunktion entlang der zeitlich aufeinander folgenden Konstellationen der Zustandsparameter. (Vgl. u. a. FISHER 1925.)

Es bezeichne $T = [t_A, t_E]$ das normierte phänologische Zeitintervall im Zustandsraum mit dem Aussaattermin t_A und dem Erntetermin t_E. Es bezeichne ferner $x = (t, x_1(t), \ldots, x_s(t))$ den Vektor der Zustandsparameter. Der zeitliche Verlauf der am Standort der Pflanzen aufeinander folgenden Zustände der Umgebung erscheint dann im Zustandsraum als eine bestimmte Raumkurve (Abb. 1).

Als Bewertung der einzelnen durch den Vektor x dargestellten Zustände wird eine Funktion $f(x)$ benutzt, die über dem Zustandsraum erklärt und integrierbar ist. Für die Ertragsbildung ergibt sich hieraus der folgende allgemeine Ansatz

$$y = \int_T f(x)\, dt + u\,, \qquad u: N\{0, \sigma^2\}\,, \qquad (1)$$

der allen Vorstellungen über die Ertragsbildung, aufgefaßt als eine Summe geeignet bewerteter Zustände, entgegenkommt. In der Gleichung (1) bezeichnet y die Ertragsgröße, die als zufällige Veränderliche interpretiert wird. Die Fehlergröße u wird als eine normal verteilte zufällige Veränderliche vorausgesetzt. Das in der Einleitung angedeutete, für die Pflanzenzüchtung so wesentliche Problem, die Sorten miteinander zu vergleichen, läuft jetzt auf einen Vergleich der mit den verschiedenen Sorten verknüpften Bewertungsfunktionen hinaus.

Der in der Gleichung (1) dargelegte Ansatz für die Ertragsbildung läßt sich in zweierlei Hinsicht verallgemeinern. Bisher waren die Zustandsparameter stillschweigend so aufgefaßt worden, als ob sie nur durch eine Kurve im Zustandsraum beschrieben werden könnten. Das liegt daran, daß die Zustandsparameter meistens als räumliche und zeitliche Mittelwerte vorliegen. In diesem Sinne wird beispielsweise von der „Bestandstemperatur" oder dem „Stickstoffgehalt" gesprochen. Die Zustandsparameter zeigen aber im allgemeinen am natürlichen Standort der Pflanzen ziemlich starke zeitliche und räumliche Schwankungen. Diese Schwankungen, die ja das Problem der Ertragsbildung so erschweren, legen es nun nahe, nicht bloß einen mittleren Verlauf der Zustandsparameter zu betrachten, sondern nach Möglichkeit das ganze Feld der Umweltparameter in die Untersuchungen einzubeziehen. Hier wird, und das ist die erste der angekündigten Verallgemeinerungen, folgender Standpunkt eingenommen: In jedem Zeitpunkt der pflanzlichen Entwicklung wird nicht nur eine einzige Konstellation der Zustandsparameter am Standort des Pflanzenbestandes betrachtet, die im Zustandsraum als ein Punkt erschiene, sondern es

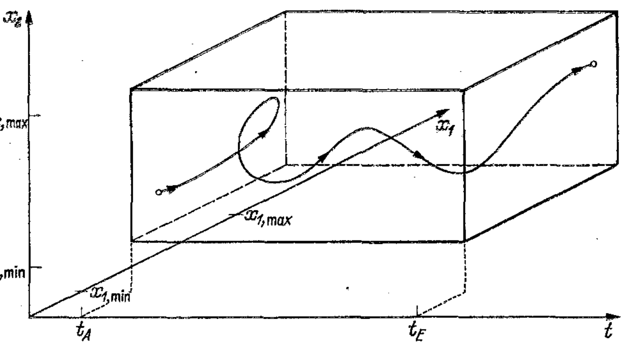

Abb. 1. Schematischer Verlauf zweier Zustandsparameter im Zustandsraum (s = 2).

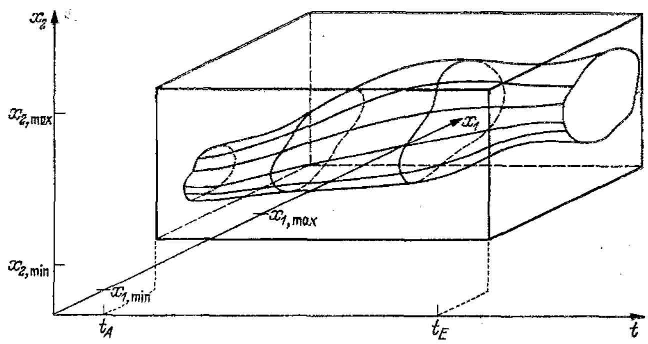

Abb. 2. Schematischer Verlauf einer Menge von Zustandsparametern im Zustandsraum (s = 2).

wird die Gesamtheit aller Konstellationen der Zustandsparameter am Standort der Pflanzen für die Untersuchungen verwendet. Das ergibt eine Menge von Punkten im Zustandsraum, die dem betreffenden Zeitpunkt zugeordnet ist. Für die praktische Ausführung dieser Überlegungen bilden die von den Extremwerten aufgespannten Intervalle eine brauchbare Näherung für diese Mengen. Über das ganze phänologische Zeitintervall gesehen, erscheint dann im Zustandsraum eine „röhrenförmige" Menge, welche alle die auf die Ertragsbildung einwirkenden Zustandsparameter der Umgebung enthält (Abb. 2).

Im Sinne der allgemeinen Vorstellungen über die Ertragsbildung wird jetzt die Zuordnung zwischen den Mengen im Zustandsraum und den als zufällige Veränderliche aufgefaßten Ertragsgrößen durch eine geeignete zufällige Mengenfunktion hergestellt (vgl. CLAUS 1964). Der entsprechende Ansatz lautet

$$y(A) = \int_A f(x)\, dx + u(A)\,, \quad u(A): N\{0, \sigma^2 \cdot \mu(A)\}\,. \quad (2)$$

Damit wird der beobachteten Teilmenge A des Zustandsraumes vermöge eines Integrales über die die Sorte charakterisierende Bewertungsfunktion $f(x)$ eine mittlere Ertragsgröße zugeschrieben. $u(A)$ bezeichnet eine spezielle normal verteilte zufällige Mengenfunktion im PRÉKOPAschen Sinne (1956, 1957), deren Erwartungswert gleich Null und deren Varianz ein bis auf den Faktor σ^2 vorgegebenes Maß μ über den Zustandsraum sein soll.

An diese Darstellung der Ertragsgröße knüpft sich die zweite Verallgemeinerung. Während für die Gleichung (1) die Ertragsgrößen für verschiedene Folgen von Zuständen als voneinander unabhängig angenommen wurden, werden die Ertragsgrößen jetzt als korrelierende Größen angesehen. Je besser die beobachteten Mengen der Zustandsparameter für zwei Ertragsgrößen übereinstimmen, desto höher ist die positive Korrelation zwischen ihnen. Das entspricht, etwas vergröbert formuliert, der Vorstellung, daß für die betreffende Sorte übereinstimmende Umweltverhältnisse auch übereinstimmende Ertragsgrößen nach sich ziehen.

5. Beziehungen zu einer anderen Ertragsdarstellung

Bevor auf das Schätzen der unbekannten Funktion $f(x)$ innerhalb einer geeigneten Klasse von Funktionen eingegangen wird, mögen die Beziehungen zu einer anderen Auffassung der Ertragsbildung dargelegt werden. In der Arbeit von v. BOGUSLAWSKI, LIMBERG und SCHNEIDER (1963) werden die Überlegungen von MITSCHERLICH fortgeführt und die Relationen zwischen den verabreichten Nährstoffgaben und den dadurch bewirkten Erträgen mathematisch in einem Ertragsgesetz erfaßt. Obwohl sich das in der vorliegenden Arbeit beschriebene Vorgehen zum Problem der Ertragsbildung, ganz abgesehen von dem hier erstrebten Vergleich verschiedener Ertragsbildungen, sehr von dem von v. BOGUSLAWSKI, LIMBERG und SCHNEIDER (1963) geschilderten unterscheidet, läßt sich deren Ertragsgesetz als ein Spezialfall der hier mitgeteilten allgemeinen Ansätze deuten. Um dies wenigstens für den in der Gleichung (1) genannten Ansatz zu erklären, ist zunächst vorauszuschicken, daß alle Zustandsparameter bis auf einen, etwa $x_1(t)$, welcher den Verlauf der Nährstoffmenge während der Ertragsbildung kennzeichnen soll, als konstant anzunehmen sind. Die Funktion $f(t, x_1(t), \ldots, x_s(t))$ geht dann in eine gewisse Funktion $f^*(t, x_1(t))$ über. Damit eine Übereinstimmung zwischen den beiden verschiedenen Vorgehen erzielt werden kann, müßte für irgendeine geeignete Funktion f^* gelten

$$\int_{t_A}^{t_E} f^*(t, x_1(t))\, dt = F(x_A + x_0)\,, \qquad x_A, x_0 \geqq 0\,, \quad (3)$$

mit

$$0 \leqq x_1(t) \leqq x_A + x_0\,, \qquad t_A < t \leqq t_E\,,$$
$$x_1(t_A) = x_A + x_0\,.$$

Darin bezeichnet $F(x_A + x_0)$ die von v. BOGUSLAWSKI, LIMBERG und SCHNEIDER (1963) eingeführte Ertragsfunktion mit der dem Boden zu Versuchsbeginn zugeführten Nährstoffmenge x_A und der schon im Boden vorhandenen Nährstoffmenge x_0 als Veränderliche. (Im Original mit x und i bezeichnet.) Diese Gleichung charakterisiert eine eigentümliche Beziehung. Während auf der rechten Seite eine gewöhnliche Funktion $F(x_A + x_0)$ der Nährstoffmengen $x_A + x_0$ steht, stellt die linke Seite ein Funktional des Verlaufes der Nährstoffmenge $x_1(t)$ dar. Soll die Gleichung (3) für alle in (3) zulässigen Funktionen $x_1(t)$ bestehen, so folgt notwendig, daß das Funktional nur von dem Anfangswert $x_A + x_0$, aber nicht von dem übrigen Verlauf der Funktion $x_1(t)$ abhängt. Vereinfachend darf deshalb die Funktion $x_1(t)$ in der Beziehung (3) durch die Konstante $x_A + x_0$ ersetzt werden:

$$\int_{t_A}^{t_E} f^*(t, x_A + x_0)\, dt = F(x_A + x_0)\,. \quad (4)$$

Da es nur noch darauf ankommt, irgendeine Funktion f^* anzugeben, welche diese Beziehung (4) erfüllt, genügt es, beispielsweise den Ansatz

$$f^*(t, x_A + x_0) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(x_A + x_0)$$

zu machen. Für die Abhängigkeit von $x_A + x_0$ ergibt sich dann

$$\varphi_2(x_A + x_0) = \frac{F(x_A + x_0)}{\int_{t_A}^{t_E} \varphi_1(t)\, dt}\,. \quad (5)$$

Bis auf eine willkürliche Funktion $\varphi_1(t)$ der Zeit ist damit eine spezielle Funktion f^* angegeben, welche die geforderten Bedingungen erfüllt. Abschließend sei hierzu noch angemerkt, daß es von vornherein klar ist, in der großen Klasse der über dem Zustandsraum integrierbaren Funktionen keinesfalls eine eindeutige Bestimmung der Funktion $f^*(t, x_1(t))$ unter den angegebenen Bedingungen zu erreichen.

6. Schätzen der Bewertungsfunktionen

Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf den allgemeineren Ansatz (2), der den in Gleichung (1) aufgeführten als Spezialfall mit umfaßt.

Da von vornherein keine Anhaltspunkte darüber gegeben sind, welche Gestalt im einzelnen die unbekannte Funktion $f(x)$ haben müßte, um eine bestimmte Sorte in ihrer Ertragsbildung charakterisieren zu können, da außerdem, wie schon im vorhergehenden Abschnitt angedeutet, die Klasse der über dem Zustandsraum integrierbaren Funktionen so weit ist, daß aus experimentell gewonnenen Ertragsgrößen allein kaum eine eindeutige Bestimmung der unbekannten Funktion $f(x)$ möglich sein dürfte, erscheint es zweckmäßig, sich auf eine geeignete Teilklasse dieser Funktionen zu beschränken, welche eine übersichtliche und eindeutige Bestimmung der unbekannten Funktion aus den gegebenen Daten zuläßt. Es liegt daher nahe, die unbekannte Funktion $f(x)$ nach einem über dem Zustandsraum erklärten System $\{f_j(x),\ j = 1, \ldots, p\}$ linear unabhängiger (integrierbarer) Basisfunktionen zu entwickeln, die für die betreffenden Sorten vorteilhaft erscheinen:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j(x) \,. \tag{6}$$

Wird dieser in den Koeffizienten β_j lineare Ansatz für die unbekannte Funktion $f(x)$ gemacht, so ergibt sich für die Auswertung unter Berücksichtigung der Gleichung (2) die folgende Regressionsgleichung

$$y = X\beta + u\,, \quad y^T = (y(A_1), \ldots, y(A_n))\,.^1 \tag{7}$$

In dieser Gleichung bedeutet y den zufälligen Vektor der zu den einzelnen Mengen $A_1, \ldots, A_n$ von Zustandsparametern im Versuch festgestellten Ertragsgrößen, X die folgende, zu den Zustandsparametern berechnete Matrix

$$X = \begin{pmatrix} \int_{A_1} f_1(x)\,dx \ldots \int_{A_1} f_p(x)\,dx \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \int_{A_n} f_1(x)\,dx \ldots \int_{A_n} f_p(x)\,dx \end{pmatrix},$$

wobei $p \leqq n$ zu fordern ist, β den Spaltenvektor der unbekannten Koeffizienten $\beta_1, \ldots, \beta_p$ und u die vektorielle Fehlergröße

$$u^T = (u(A_1), \ldots, u(A_n))\,.$$

Die mit dem Fehlervektor u verknüpfte Kovarianzmatrix lautet

$$\Sigma = \sigma^2 \,.\, M$$

mit der Matrix

$$M = (\mu(A_{i_1} \cap A_{i_2}))\,, \quad i_1, i_2 = 1, \ldots, n\,.^2$$

Hierzu sei noch angemerkt, daß über dem Zustandsraum für alle auftretenden Mengenfunktionen eine geeignete σ-Algebra $\mathfrak{S}$ von Teilmengen des Zustandsraumes zugrunde gelegt wird, welche die speziellen für die Ertragsbildung wichtigen Mengen der Zustandsparameter enthält.

Vorausgesetzt daß die Rangrelation

$$\mathrm{rg}\,(X^T M^{-1} X) = p \tag{8}$$

erfüllt ist, lassen sich für den Vektor β und den Faktor σ^2 der Varianz Schätzwerte nach bekannten Verfahren angeben. (Vgl. hierzu und für das folgende z.B. AITKEN 1933/1934, 1934/1935, RAO 1952, KULLBACK und ROSENBLATT 1957.) Es ergibt sich für die Schätzwerte

$$\hat\beta = S^{-1} X^T M^{-1} y\,, \qquad S = X^T M^{-1} X\,, \tag{9}$$

$$\hat\sigma^2 = \frac{1}{n-p}\,[y^T M^{-1} y - \hat\beta^T S \hat\beta]\,. \tag{10}$$

7. Vergleich mehrerer Bewertungsfunktionen

Es sollen m ($m \geqq 2$) Sorten einer Kulturpflanzenart hinsichtlich ihrer Ertragsbildung miteinander verglichen werden. Das läuft auf das Problem hinaus, einen Test für die mit den Sorten verbundenen Bewertungsfunktionen anzugeben. Um den Vergleich ausführen zu können, sind für jede der m Sorten die n_k, $k = 1, \ldots, m$, beobachteten Ertragsgrößen und die zugehörigen Mengen der beobachteten Zustandsparameter vorgegeben zu denken. Nach dem vorausgegangenen ist für jede Sorte die Regressionsgleichung

$$y_k = X_k \beta_k + u_k\,, \quad k = 1, \ldots, m\,, \tag{11}$$

zu betrachten. Die zu prüfende Hypothese

$$H_0 = H\,\{\beta_k = \beta^0\,, \quad k = 1, \ldots, m\} \tag{12}$$

besagt die Gleichheit aller Koeffizientenvektoren β_k untereinander. Wird sie auf Grund des folgenden Testes verworfen, so sind die Bewertungsfunktionen der m Sorten und damit deren Ertragsbildungen als voneinander verschieden zu betrachten.

Die hier benötigte Teststatistik läßt sich in übersichtlicher Weise aus einer Varianztabelle gewinnen, wie sie bei der Varianzanalyse verwendet wird. Dazu müssen vorbereitend die Koeffizienten geschätzt werden, und zwar einmal ohne einschränkende Bedingungen, nämlich aus der Gleichung

$$\hat\beta^1 = S^{(1)-1} X^{(1)T} \Lambda^{-1} y \tag{13}$$

und einmal unter der Hypothese H_0 aus der Gleichung

$$\hat\beta^0 = S^{(2)-1} X^{(2)T} \Lambda^{-1} y\,. \tag{14}$$

Dabei bezeichne y den Vektor aller beobachteten Ertragsgrößen

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad y_k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{n_k k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, m\,.$$

In den beiden Gleichungen (13) und (14) zur Berechnung der Schätzwerte $\hat\beta^1$ und $\hat\beta^0$ bedeuten $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ die beiden folgenden aus den gegebenen Datenmatrizen X_k, $k = 1, \ldots, m$, gebildeten Übermatrizen

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & X_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & X_m \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Aus diesen Matrizen und der Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \sigma^2 \Lambda = \sigma^2 \begin{pmatrix} M_{11} \ldots M_{1m} \\ \vdots \\ M_{m1} \ldots M_{mm} \end{pmatrix},$$

$$E\,\{u_i u_k^T\} = \sigma^2 M_{ik}\,, \quad i,\ k = 1, \ldots, m\,,$$

ergeben sich die Matrizen

$$S^{(1)} = X^{(1)T} \Lambda^{-1} X^{(1)}\,, \quad S^{(2)} = X^{(2)T} \Lambda^{-1} X^{(2)}\,.$$

Unter der Voraussetzung

$$\begin{aligned} &\mathrm{rg}\,(\Lambda) = N = n_1 + \cdots + n_m \\ &\mathrm{rg}\,(X^{(1)} S^{(1)-1} X^{(1)T}) = p\,m \\ &\mathrm{rg}\,(X^{(2)} S^{(2)-1} X^{(2)T}) = p \end{aligned} \tag{16}$$

sind die in der Varianztabelle aufgeführten Ausdrücke sinnvoll. Die Varianzen V_1 und V_2 berechnen sich in der bekannten Weise, indem die betreffende

[1] $(\ldots)^T$ bezeichnet die transponierte Matrix zu der in den Klammern stehenden.
[2] Das Symbol $\cap$ bezeichnet die Operation der Durchschnittsbildung für Mengen.

Quadratsumme SQ durch ihre Freiheitsgrade FG geteilt wird.

Variation	SQ	FG	V
insgesamt	$y^T A^{-1} y$	N	—
Regression bez. $\hat{\beta}^1$	$\hat{\beta}^{1T} S^{(1)} \hat{\beta}^1$	$p\,m$	—
Regression bez. $\hat{\beta}^0$	$\hat{\beta}^{0\,T} S^{(2)} \hat{\beta}^0$	p	—
Differenz	$\hat{\beta}^{1\,T} S^{(1)} \hat{\beta}^1 - \hat{\beta}^{0\,T} S^{(2)} \hat{\beta}^0$	$p\,(m-1)$	V_1
Rest	$y^T A^{-1} y - \hat{\beta}^{1\,T} S^{(1)} \hat{\beta}^1$	$N - p\,m$	V_2

Unter der Hypothese H_0 ist der Quotient V_1/V_2 der Varianzen wie die F-Statistik mit $\nu_1 = p\,(m-1)$ und $\nu_2 = N - p\,m$ Freiheitsgraden verteilt

$$F = \frac{V_1}{V_2}. \tag{17}$$

Zur vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit P lauten die Entscheidungsregeln

$$\begin{aligned} F &\geqq F\,(P/p(m-1);\ N-pm) \Longrightarrow \text{Ablehnung von } H_0 \\ F &< F\,(P/p(m-1);\ N-pm) \Longrightarrow \text{Annahme von } H_0\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Für den Ansatz (1), dies sei abschließend noch angemerkt, vereinfacht sich die Rechnung etwas. So zerfällt die Matrizengleichung (13) in ein System von m Matrizengleichungen für die einzelnen Schätzwerte $\hat{\beta}_k$, $k = 1, \ldots, m$. Daraus ergibt sich beispielsweise für die SQ in der Zeile „Regression bez. $\hat{\beta}^1$" in der Varianztabelle der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{m} \hat{\beta}_k^T S_k \hat{\beta}_k\,, \quad S_k = X_k^T X_k\,, \quad k = 1, \ldots, m\,,$$

usw. Hierbei bedeuten die X_k die den Sorten entsprechenden mit dem Ansatz (1) verbundenen Matrizen.

8. Schlußbemerkungen

Die vorliegenden allgemeinen Erörterungen zu dem Problem, die Ertragsbildung der Sorten und Stämme quantitativ zu erfassen, stellen notwendige biometrische Grundlagen dar, welche dazu verhelfen sollen, den Nachweis unterschiedlicher Ertragsbildungen in den Parametern der Umwelt zu ermöglichen. Der bisher bei Sorten übliche reine Ertragsvergleich kann also durch den Vergleich der auf die Umwelteinflüsse bezogenen Ertragsbildungen erweitert und vervollständigt werden. Allerdings setzt eine solche Darstellung der Ertragsbildung in den Parametern der Umwelt sehr genaue Leistungsprüfungen voraus, in welchen der zeitliche Verlauf wenigstens der wichtigsten Umweltfaktoren eingehend erfaßt wird. Nach Möglichkeit sollten die Leistungsprüfungen während der Vegetationszeit noch durch die fortlaufende Kontrolle der für die Ertragsbildung wichtigsten pflanzlichen Größen ergänzt werden (vgl. Unger 1963). Immer ist aber die im Abschnitt 6 genannte Bedingung zu beachten, daß der Stichprobenumfang (n) für das Schätzproblem nicht kleiner als die Anzahl (p) der im Ansatz für die Ertragsbildung erwünschten Basisfunktionen sein darf. Deshalb ist es zweckmäßig, um einen genügend großen Stichprobenumfang zu gewinnen, die Ertragsversuche in mehreren Jahren zu wiederholen oder geeignete Komplexversuche anzulegen, in welchen z. B. verschiedene Aussaatzeiten oder Beregnungsstufen usw. nicht nur Wiederholungen, sondern auch echte Variationen der Umweltparameter liefern. Im Sinne der hier dargelegten Vorstellungen wäre dabei die Messung und Registrierung der Umweltparameter in den entsprechenden einzelnen Versuchseinheiten unerläßlich. Daraus ergibt sich, daß der Informationsgehalt der Leistungsprüfungen zum Nachweis von Sortenunterschieden hinsichtlich der Ertragsbildung ganz entscheidend von der exakten Erfassung der einzelnen Umweltfaktoren abhängt. Die Größe des Stichprobenumfanges und die fortlaufende Registrierung der Umweltparameter, das bleibe nicht unerwähnt, begrenzen im allgemeinen die Möglichkeit einer solchen Auswertung der Ergebnisse von Leistungsprüfungen zur Bestimmung der unterschiedlichen Ertragsbildung. Für die Vorselektion geeigneten Zuchtmaterials müssen deshalb zusätzliche Beobachtungen, Auszählungen und Messungen von ertragsbestimmenden Größen an den Pflanzen ausgeführt und weitere Untersuchungen unter besonderen experimentellen Versuchsbedingungen hinzugenommen werden; denn bei den üblichen Prüfungen des Zuchtmaterials wird ein hinreichend großer Stichprobenumfang kaum zu erreichen sein.

Das hier geschilderte Verfahren, die Ertragsbildung verschiedener Sorten miteinander zu vergleichen, liefert aber unter der Voraussetzung, daß sich die Sorten in ihrer genetischen Zusammensetzung nicht verändern, nicht nur eine Entscheidung darüber, ob überhaupt Sortenunterschiede hinsichtlich der Ertragsbildung in bezug auf die Umweltparameter bestehen oder nicht, sondern es ermöglicht auch, wie schon eingangs erwähnt, in guter Näherung die Bestimmung der tatsächlichen Reaktionen der Sorten auf die Umweltfaktoren in Gestalt der ausgerechneten Bewertungsfunktionen. Damit läßt sich die Aussagekraft der Leistungsprüfungen durch die Registrierung und Messung der die Ertragsbildung beeinflussenden Umweltfaktoren sowie durch die Messung biologischer Größen wesentlich erhöhen. Es dürfte deshalb in der Zukunft durchaus möglich sein, auch von dieser Seite her zu genaueren Maßstäben für die Beurteilung der Sorten hinsichtlich ihrer Ertragsbildung zu kommen.

9. Zusammenfassung

Um die Ertragsbildung der Sorten einer Kulturpflanzenart in den Parametern der Umweltbedingungen vergleichen zu können, werden die notwendigen biometrischen Grundlagen dargelegt. Unter der Voraussetzung, daß der Stichprobenumfang ausreichend groß ist und die Wirkungen verschiedener Konstellationen der Umweltparameter auf die Pflanzen weitgehend unabhängig voneinander sind, kann eine allgemeine Vorstellung über die Ertragsbildung durch die Zuordnung zwischen der als zufällige Veränderliche aufgefaßten Ertragsgröße und der Menge der Umweltparameter im Zustandsraum über eine Bewertungsfunktion gegeben werden. Ein statistischer Test für die Unterschiede mehrerer Bewertungsfunktionen ermöglicht es, quantitative Maßstäbe für die Beurteilung der sortenspezifischen Ertragsbildung zu erhalten.

Literatur

1. Aitken, A. C.: On Fitting Polynomials to Data with Weighted and Correlated Errors. Proceedings Roy.

Soc. of Edinburgh **54**, 12–16 (1933/1934). — 2. AITKEN, A. C.: On Least Squares and Linear Combinations of Observations. Proceedings Roy. Soc. of Edinburgh **55**, 42–48 (1934/1935). — 3. BOGUSLAWSKI, E. v., P. LIMBERG und B. SCHNEIDER: Grundlagen und Gesetzmäßigkeiten der Ertragsbildung. Z. Acker- und Pflanzenbau **116**, 231–256 (1963). — 4. CLAUS, S.: Stochastische Prozesse über vorgegebenen Mengenfamilien. In Abhandl. d. Deutschen Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathem., Phys. u. Techn. (Internationale Tagung über Mathematische Statistik und ihre Anwendungen. Berlin v. 4.–8. 9. 1962. Hrsg. v. K. SCHRÖDER). Berlin: Akademie-Verlag 1964. — 5. FISHER, R.A.: The Influence of Rainfall on the Yield of Wheat atRothamsted. Phil. Transact. Roy. Soc. of London, Series B, **213**, 89–142 (1925). — 6. FISHER, R. A.: Statistical Methods for Research Workers. 11th. ed. Edinburgh: Oliver and Boyd 1950. — 7. KEMPTHORNE, O.: The Design and Analysis of Experiments. New York: John Wiley 1952. — 8. KULLBACK, S., and H. M. ROSENBLATT: On the Analysis of Multiple Regression in k Categories. Biometrika **44**, 67–83 (1957). — 9. PRÉKOPA, A.: Stochastic Set Functions. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae Tom. 7, 215–263 (1956). — 10. PRÉKOPA, A.: Stochastic Set Functions. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae Tom. 8, 337–374 (1957). — 11. RAO, C. R.: Advanced Statistical Methods in Biometric Research. New York: John Wiley 1952. — 12. UNGER, K.: Biophysikalische Untersuchungen der Ertragsbildung als Problem der Züchtungsforschung. Sitzungsber. Deutsch. Akad. d. Landwirtschaftswiss. Berlin **12**, 21–40 (1963). —

Aus dem Institut für Pflanzenzüchtung Quedlinburg der Deutschen Akademie der Landwirtschaftswissenschaften zu Berlin

Über den Einfluß der Anbaustufen des Saatgutes auf Frühzeitigkeit und Ertragsleistung bei Radies (*Raphanus sativus* L.) im Unterglasanbau *

Von **H. LANGE**

Quedlinburger Beiträge zur Züchtungsforschung Nr. 70

Mit 1 Abbildung

Besonders bei Kulturpflanzen mit kurzer Vegetationszeit ist die Leistung einer Sorte nicht nur von ihrer idiotypischen Konstitution abhängig, sondern auch von modifikatorischen Einflüssen auf die Qualität des Samens, die im allgemeinen als Saatgutwert bezeichnet wird (POLLMER 1964). Diese Tatsache verdient in der Praxis des Anbaues insofern Beachtung, als dort öfter die Meinung vertreten wird, daß zwischen den Ergebnissen der amtlichen Leistungsprüfungen und den Erträgen der Praxis Diskrepanzen bestehen. Diese werden meist als Nachlassen der Leistung der Sorten gedeutet. Die Ursachen können aber eher im unterschiedlichen Wert des Saatgutes oder in der Tatsache gesucht werden, daß Saatgut verschiedener Anbaustufen verwendet wird.

So ist bekannt, daß der Wert des Saatgutes abhängig ist von den Umwelt- und Anbaubedingungen, unter denen es erzeugt wurde (KRUG 1964).

Andererseits wird in den amtlichen Prüfungen im Vergleich zu den Neuzüchtungen selbstverständlich die entsprechende Anbaustufe der zugelassenen Sorten, also Zuchtgartenelite, verwendet. In der Praxis dagegen wird Hochzuchtsaatgut, also die niedrigste Anbaustufe ausgesät.

Eine Klärung des Einflusses der Anbaustufen in Verbindung mit dem jeweiligen Saatgutwert liegt nicht nur im Interesse des Anbauers, sondern vor allem auch des Züchters.

Deshalb haben wir 1961 und 1962 in der Gewächshausanlage des Instituts für Pflanzenzüchtung Quedlinburg Untersuchungen mit weitgehend einheitlichen Umweltbedingungen zur Klärung dieser Frage durchgeführt. Als Versuchsobjekt dienten Radies im Unterglasanbau[1], weil es hier schon Hinweise gibt, daß die Korngröße als Teil des Saatgutwertes den Gesamtertrag beeinflußt. Dagegen ist über den Einfluß der Anbaustufen auf die Leistung, insbesondere Frühzeitigkeit und Gesamtertrag, nichts bekannt.

* Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. BECKER zum 60. Geburtstag gewidmet.

[1] im folgenden kurz als „Treibradies" bezeichnet.

I. Material und Methode

Wir beschränkten uns bei diesen Versuchen auf 2 Sorten, bei denen die Saatguterzeugung aller geprüften Saatgutpartien jeweils im gleichen Jahr (1960 bzw. 1961) im Raum Quedlinburg, also unter annähernd gleichen Klima- und Bodenverhältnissen, erfolgte.

Als Sorten wurden verwendet:

Wodan	sehr früh reifend mit starker Neigung zur Pelzigkeit;
Promptus	früh reifend, praktisch pelzfest.

Um von vornherein den Einfluß der Korngröße getrennt feststellen zu können, wurde das Saatgut aller Partien nach folgenden Größen gesiebt:

Korngröße I	über 2,5 mm Durchmesser,
Korngröße II	2,0–2,5 mm Durchmesser,
Korngröße III	unter 2,0 mm Durchmesser,
Unsortiert	handelsüblich.

Damit einheitliches Ausgangsmaterial für die Beurteilung zur Verfügung stand, wurden alle beschädigten Körner entfernt. Der prozentuale Anteil der Korngrößen nach dem Entfernen der beschädigten Körner war im Mittel der Prüfjahre bei beiden Sorten annähernd gleich. Mit 53,1% hatte die Größe II den höchsten Anteil, während die Größe I mit 29,2% beteiligt war. Größe III umfaßte nur 17,7%.

Von beiden Sorten wurde Saatgut der Anbaustufen

Zuchtgartenelite (ZGE)
Elite (E)
Hochzucht (Hz)